

大量程浊度测量的散射角实验研究

甄理 葛乃义 张海韬 郑叶龙 赵美蓉 黄银国

Experimental study of scattering angle for large-scale turbidity measurement

ZHEN Li, GE Naiyi, ZHANG Haitao, ZHENG Yelong, ZHAO Meirong, HUANG Yinguo

引用本文:

甄理, 葛乃义, 张海韬, 等. 大量程浊度测量的散射角实验研究[J]. 应用光学, 2024, 45(4): 768–773. DOI: 10.5768/JAO202445.0403001

ZHEN Li, GE Naiyi, ZHANG Haitao, et al. Experimental study of scattering angle for large-scale turbidity measurement[J]. Journal of Applied Optics, 2024, 45(4): 768–773. DOI: 10.5768/JAO202445.0403001

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.5768/JAO202445.0403001>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

大量程激光位移传感器的成像系统设计

Design of imaging system for wide-range laser displacement sensor

应用光学. 2022, 43(3): 386–391 <https://doi.org/10.5768/JAO202243.0301002>

偏振相移与相位共轭结合的散射光聚焦技术研究

Focusing of scattering light by combining polarization phase shifting and digital optical phase conjugation

应用光学. 2019, 40(1): 63–67 <https://doi.org/10.5768/JAO201940.0101011>

基于后向散射的高浓度纳米颗粒粒度分布测量方法研究

Research on measurement method of size distribution for high-concentration nano-particles based on back scattering

应用光学. 2021, 42(3): 516–521 <https://doi.org/10.5768/JAO202142.0303004>

基于后向散射法测量蒸汽湿度反演算法的优化

Optimization of steam humidity measurement inversion algorithm based on back angle scattering method

应用光学. 2019, 40(4): 612–619 <https://doi.org/10.5768/JAO201940.0402005>

基于微面元理论的“猫眼”目标回波散射偏振特性研究

Analysis of polarization characteristics for cat's eye target echo scattering based on microfacet theory

应用光学. 2020, 41(5): 916–923 <https://doi.org/10.5768/JAO202041.0501007>

基于空间光调制器的光束大角度扫描技术研究

Large angle range beam scanning control based on crystal spatial light modulator

应用光学. 2020, 41(4): 816–821 <https://doi.org/10.5768/JAO202041.0409803>



关注微信公众号，获得更多资讯信息

文章编号: 1002-2082 (2024) 04-0768-06

大量程浊度测量的散射角实验研究

甄 理, 葛乃义, 张海韬, 郑叶龙, 赵美蓉, 黄银国

(天津大学 精密测试技术及仪器国家重点实验室, 天津 300072)

摘 要: 浊度对于评价水体质量具有重要的意义。针对 90° 散射法在高浊度范围测量误差大、分辨率低的问题, 提出了一种 135° 散射大量程浊度测量方法。由于散射相位函数与散射角密切相关, 实验研究了散射角的浊度测量适应性。通过多项式拟合阶次分析发现, 在 100 NTU~2 000 NTU 范围内单一散射条件下, 135° 散射法具有更大的量程范围。经过实验标定, 分段线性拟合的 R^2 结果分别为 0.99 (100 NTU~800 NTU), 0.98 (800 NTU~1 500 NTU) 和 0.99 (1 500 NTU~2 000 NTU)。实验证明, 135° 散射法可以扩大浊度测量范围, 改善高浊度范围内测量精度。

关键词: 浊度; 散射角; 散射相位函数; 大量程

中图分类号: TN247

文献标志码: A

DOI: 10.5768/JAO202445.0403001

Experimental study of scattering angle for large-scale turbidity measurement

ZHEN Li, GE Naiyi, ZHANG Haitao, ZHENG Yelong, ZHAO Meirong, HUANG Yinguo

(State Key Laboratory of Precision Measurement Technology and Instruments,
Tianjin University, Tianjin 300072, China)

Abstract: Turbidity is of great significance for evaluating water quality. Addressing the issue of large measurement errors and low resolution encountered with the 90° scattering method in high turbidity scenarios, an advanced turbidity measurement technique utilizing 135° scattering was introduced, suitable for a wide range of turbidity. Since the scattering phase function was closely related to the scattering angle, the turbidity measurement adaptability of the scattering angle was studied by experiment. The analysis, conducted through polynomial fitting order, revealed that the 135° scattering method demonstrated a more extensive measurement range, particularly effective in the 100 NTU~2 000 NTU range. The method underwent rigorous experimental calibration, yielding segmented linear fitting R^2 results of 0.99 for 100 NTU~800 NTU, 0.98 for 800 NTU~1 500 NTU, and 0.99 for 1 500 NTU~2 000 NTU. Experimental results show that the 135° scattering approach can extend the turbidity measurement range and improve the precision of measurements in high-turbidity conditions.

Key words: turbidity; scattering angle; scattering phase function; large range

引言

浊度是水体质量的综合要素, 也是评价水体质量的重要参考指标之一。目前, 在线浊度测量主要采用光学测量的方法, 其中以 90° 散射法应用最广。虽然在低浊度的测量范围内 90° 散射法取得了良好的效果, 但是当测量大浊度水体时, 往往出现了误差增大、分辨率降低的问题^[1,2]。

目前, 为提高浊度的测量范围, 同时解决大浊度水体的测量问题, 2016 年王志丹等人^[1]研究了采用 90° 散射法和表面散射法相结合的方法。在测量低浊度范围时采用 90° 散射的测量方法, 在测量高浊度范围时采用测量液体表面散射光的方法, 为提高浊度仪的测量范围、改善高浊度水体测量精度提供了一种解决方案。2018 年, 邹钦文等人^[3]

收稿日期: 2023-08-07; 修回日期: 2023-12-06

作者简介: 甄理 (1998—), 男, 硕士研究生, 主要从事光电检测研究。E-mail: 2021202298@tju.edu.cn

通信作者: 黄银国 (1978—), 男, 博士, 副教授, 主要从事光电传感器检测技术研究。E-mail: hyg@tju.edu.cn

采用监测超声衰减的测量方法,研究了超声波衰减、浓度和浊度之间的关系,通过测量超声波在高浊度水体中传播的衰减量,进而得出了水体的浊度信息。2019年, WANG Y Z 等人^[4]开发了一种基于单光子检测技术的浊度测量系统,利用高灵敏度的雪崩二极管将光强信息量化为相应的光子数,提高了系统的灵敏度和响应速度。经实验验证,当入射光功率为 100 mW 时,系统的有效测量范围可以扩大至 10 NTU~4 000 NTU。2020 年, LI W 等人^[5]提出了调节光强的方法来改善浊度仪的测量范围和测量精度,分别在不同光强下建立了低浊度和高浊度的测量模型,并验证了该模型的可行性。同年, GIMENEZ A J 等人^[6]采用了图像处理技术来测量浊度,提出了一种基于光学传输图形检测来测量液体浊度的方法。通过基于 Beer-Lambert 模型的数学算法来分析数据,得出图像损失与液体浊度之间的关系,为解决大浊度测量问题提供了新的思路。

本文为解决大浊度的测量问题,在原有传统光学测量的基础上,通过分析实验结果,提出了一种利用 135° 散射光测量的方法,提高了浊度仪的测量范围,改善了浊度仪的测量精度。

1 光学散射浊度测量与散射角度关系

当入射光通过含有悬浮微粒的溶液时,会发生散射、折射、透射与吸收现象。溶液中悬浮颗粒的散射主要是瑞利散射和 Mie 散射。设悬浮微粒半径为 r , 入射光波长为 λ , 引入无量纲参数 α , 设:

$$\alpha = \frac{2\pi r}{\lambda} \quad (1)$$

则当 $\alpha < 0.1$ 时,认为发生的是瑞利散射;当 $0.1 < \alpha \leq 50$ 时发生的是 Mie 散射。实验中所用标准浊度液主要发生的是 Mie 散射^[7]。根据经典的 Mie 散射理论^[8],总散射光强 I_s 可以表示为垂直散射面的散射光强 I_r 和平行散射面的散射光强 I_l 之和,即:

$$I_r = \frac{\lambda^2 I_0}{4\pi^2 r^2} |S_1(\theta)|^2 \sin^2(\varphi) \quad (2)$$

$$I_l = \frac{\lambda^2 I_0}{4\pi^2 r^2} |S_2(\theta)|^2 \cos^2(\varphi) \quad (3)$$

$$I_s = \frac{\lambda^2 I_0}{4\pi^2 r^2} [|S_1(\theta)|^2 \sin^2(\varphi) + |S_2(\theta)|^2 \cos^2(\varphi)] \quad (4)$$

式中: r 为观测点与球形颗粒的距离,其散射角为 θ ; 入射光振动面和散射面之间的夹角为 φ ; $S_1(\theta)$ 和 $S_2(\theta)$ 是相对应于 Mie 散射的垂直与平行散射平面

的电场分量的振幅函数,可表示为

$$S_1(\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n(n+1)} [a_n \pi_n(\cos \theta) + b_n \tau_n(\cos \theta)] \quad (5)$$

$$S_2(\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n(n+1)} [a_n \tau_n(\cos \theta) + b_n \pi_n(\cos \theta)] \quad (6)$$

式中: a_n, b_n 称为 Mie 散射系数; π_n, τ_n 是关于散射角 θ 的函数,表达式为

$$a_n = \frac{\psi_n(\alpha) \psi'_n(m\alpha) - m \psi'_n(\alpha) \psi_n(m\alpha)}{\zeta_n(\alpha) \psi'_n(m\alpha) - m \zeta'_n(\alpha) \psi_n(m\alpha)} \quad (7)$$

$$b_n = \frac{m \psi_n(\alpha) \psi'_n(m\alpha) - \psi'_n(\alpha) \psi_n(m\alpha)}{m \zeta_n(\alpha) \psi'_n(m\alpha) - \zeta'_n(\alpha) \psi_n(m\alpha)} \quad (8)$$

式中: α 为式(1)中定义的尺寸参数; $m = \frac{n_s}{n_b}$ 为散射颗粒折射率相对于周围介质的折射率,则有函数:

$$\psi_n(z) = \left(\frac{z\pi}{2}\right)^{\frac{1}{2}} J_{n+\frac{1}{2}}^{(1)}(z) \quad (9)$$

$$\zeta_n(z) = \left(\frac{z\pi}{2}\right)^{\frac{1}{2}} H_{n+\frac{1}{2}}^{(2)}(z) = \left(\frac{z\pi}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \left[J_{n+\frac{1}{2}}(z) - i Y_{n+\frac{1}{2}}(z) \right] \quad (10)$$

式中: $J_{n+\frac{1}{2}}^{(1)}(z)$ 为半整数阶第一类贝塞尔函数; $H_{n+\frac{1}{2}}^{(2)}(z)$ 为半整数阶第二类汉克尔函数; $Y_{n+\frac{1}{2}}(z)$ 为半整数阶第二类贝塞尔函数; ψ'_n 和 ζ'_n 分别为对应的微商。与散射角 θ 有关的函数为

$$\pi_n(\cos \theta) = \frac{P_n^{(1)}(\cos \theta)}{\sin \theta} = \frac{dP_n(\cos \theta)}{d(\cos \theta)} \quad (11)$$

$$\tau_n(\cos \theta) = \frac{dP_n^{(1)}(\cos \theta)}{d(\theta)} \quad (12)$$

式中: $P_n^{(1)}(\cos \theta)$ 为一阶 n 次第一类勒让德函数; $P_n(\cos \theta)$ 为第一类勒让德函数。对于非单分散系, Mie 散射的散射相位函数表示为^[9]

$$P_M(\theta) = \frac{4\pi}{\beta_{sc}(\lambda)} \frac{\lambda^2}{4\pi^2} \int_{r_1}^{r_2} n(r) \times \frac{i_1(\alpha, m, \theta) + i_2(\alpha, m, \theta)}{2} dr \quad (13)$$

式中: $i_1(\alpha, m, \theta)$ 与 $i_2(\alpha, m, \theta)$ 是 Mie 理论中的散射强度函数:

$$i_1 = S_1(m, \theta, \alpha) \times S_1^*(m, \theta, \alpha) \quad (14)$$

$$i_2 = S_2(m, \theta, \alpha) \times S_2^*(m, \theta, \alpha) \quad (15)$$

式中: S_1^*, S_2^* 分别为 S_1, S_2 的共轭复数; α 为式(1)中的尺寸参数; $m = m_1 + im_2$ 为粒子相对周围介质的折射率。当虚部不为零时,表示粒子有吸收, S_1 和 S_2 即化为式(5)和式(6)的形式。 $n(r)$ 为粒子的半径分布函数; r_1 和 r_2 为粒子半径的下、上限; $\beta_{sc}(\lambda)$ 为体散射系数,可表示为

$$\beta_{sc}(\lambda) = \pi \int_{r_1}^{r_2} \frac{2r^2}{\alpha^2} n(r) \sum_{j=1}^{\infty} (2n+1) (|\alpha_j|^2 + |\beta_j|^2) dr \quad (16)$$

而对于单分散系,即均匀大小的粒子系,Mie散射的散射相位函数可简化为

$$P_M(\theta) = \frac{|S_1(\theta)|^2 + |S_2(\theta)|^2}{\sum_{n=1}^{\infty} (2n+1) (|a_n|^2 + |b_n|^2)} \quad (17)$$

带入实验中所用福尔马胂胶体的参数,可得到如图1所示的散射相位函数与散射角度的关系。

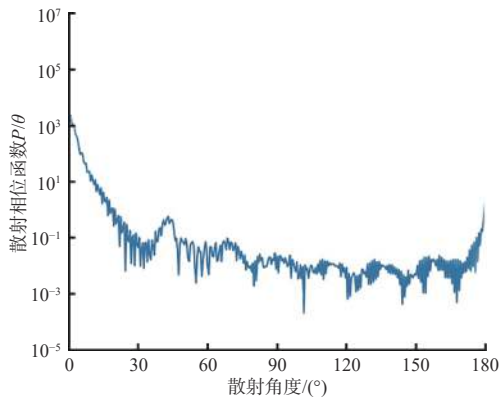


图1 散射相位函数示意图

Fig. 1 Schematic diagram of scattering phase function

根据以上分析,溶液中发生Mie散射后,不同散射角度的光强信号不同。同时,根据朗伯-比尔定律^[10],溶液某一角度的散射光强还会与散射光程有关^[11]。

对于高浊度水体,溶液中悬浮微粒物浓度增加,散射粒子间距极小,这就导致粒子间发生了多重散射,且微粒产生的散射光之间可能存在干涉^[12,13]。所以,高浊度溶液的散射光强度很难简单地用解析式表达^[14],需要根据实验具体分析。

2 实验分析

2.1 实验条件

为保证测量过程中只有散射角度一个变量,不同散射角的光信号光源光强相同、散射光程相同,设计了如图2所示的实验。LED型号为L9437,产生波长为870 nm的近红外光,且前端添加了准直透镜,保证了光线的平行度。另外,为最大限度确保光电二极管接受到的光信号只来自单一的散射角度,在光电二极管前端加装了直径4 mm的孔径光阑。

单一散射颗粒的散射光强可以表示为

$$I' = I(\theta, l, \lambda, d, m_1, m_2, \dots) \quad (18)$$

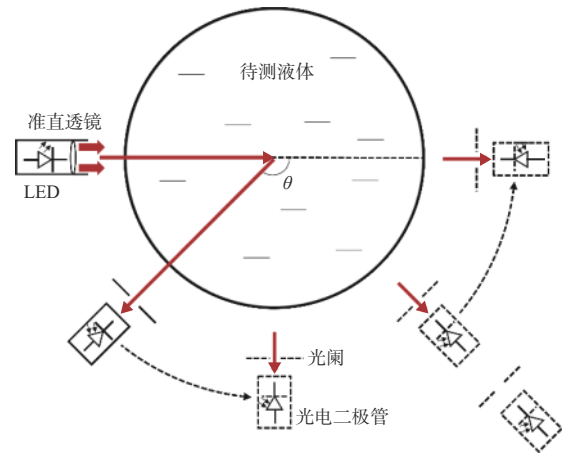


图2 实验示意图

Fig. 2 Schematic diagram of experiment

式中:括号中内容为会影响散射光强的量; θ 为散射角度; l 为散射光程; λ 为入射光波长; d 为溶液微粒粒径; m_1 和 m_2 等表示其他会影响光强的因素^[15],例如入射光光强、溶液温度^[16]等。实验中控制变量,故散射光程、入射光波长等变量对散射光强的影响可表示为常量。所以散射光强可以表达为关于散射角 θ 的函数:

$$I' = F(\theta) \quad (19)$$

设溶液中单位体积内微粒数量为 n ,则根据图2所示,某一角度的散射光强可以表示为

$$I'' = nI' = nF(\theta) \quad (20)$$

设溶液中因为多重散射、干涉等现象引起的消光现象所造成的散射光强衰减为 I_d , I_d 主要与 n 有关,可以表示为 $I_d(n)$ 。单位体积内微粒数量 n 越大,引起的消光现象越显著,散射光强衰减 I_d 也越大。综合以上分析,图2中某一角度的总散射光强可以表示为

$$I_{ss} = nF(\theta) - I_d(n) \quad (21)$$

当 n 相对较小时, I_d 可忽略不计, $nF(\theta) \gg I_d$ 。由式(21)可知,此时总散射光强 I_{ss} 随 n 增大近似线性增加。根据图1分析可得,当 $0 < \theta < 90^\circ$ 时,散射光强 $F(\theta)$ 相对更强,随着 n 逐渐增加,在一定的范围内总散射光强 I_{ss} 将会以更快的速率上升。当 $\theta > 90^\circ$ 时,由于散射光强过于微弱,多重散射虽然发生,但不会显著地体现出来^[17]。随着 n 逐渐增加,在更大的范围内总散射光强会与 n 保持近似线性关系。因为 n 与溶液浊度值呈正相关,即在低浊度范围内,随浊度值逐渐增加,小散射角的总散射光强变化将更为显著;在宽范围浊度内,大散射角的总散射光强与浊度会存在近似线性关系。

2.2 实验

测量装置实物图如图 3 所示。测量容器采用高透光光学玻璃加工制作,降低了容器杯壁的光线反射率,以减少反射光带来的测量误差。测量时,向容器中添加标准浊度液至没过 LED 和光电二极管的水平高度,以消除浊度液液面高度对散射光强度的影响。光电二极管与底座固定,LED 与转台台面固定。实验中转动精密转台,使光电二极管和 LED 产生相对位置变化,即可得到不同角度下的散射光信号。

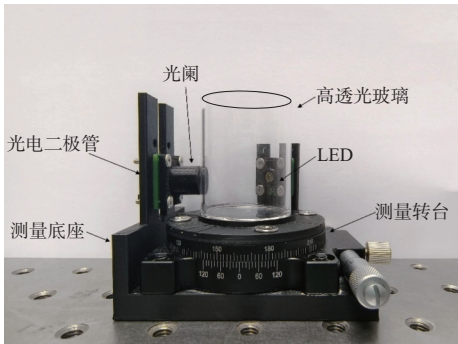


图 3 测量装置实物图

Fig. 3 Physical drawing of measuring device

系统的整体示意图如图 4 所示。为减少环境中杂散光的干扰,测量光源采用 10 kHz 的正弦调制光,光电二极管在接收到带有浊度信息的散射光信号后,经过解调处理电路转化成电压信号。采用双路锁相放大器对光电二极管接收到的正弦光强信息进行解调。对比单路锁相放大器,双路锁相放大器可以消除输入与参考信号之间相位差的影响^[18],使得装置在测量不同角度的散射光时,更好地控制变量。

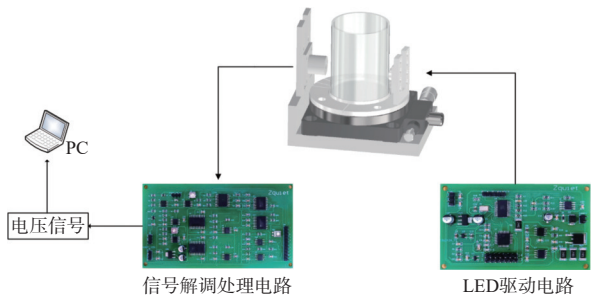


图 4 系统整体示意图

Fig. 4 Schematic diagram of system integral design

在 0~2 000 NTU 范围内,分别取 11 种不同浊度的标准液进行测量实验,实验中选取标准液浊度与散射角度如表 1 所示,测得的结果示意图如

图 5 所示。图 5 中纵坐标电压值表示最终散射信号的光强大小,电压值越大表示散射信号光强越强。其中 11°、25°散射信号在低浊度范围内光强信号超过测量范围,其输出电压值会在低浊度范围达到峰值后逐渐递减。0°信号为透射光信号,电压值与浊度值呈非线性递减关系。

表 1 实验标准液与散射角度

Table 1 Experimental standard solution and scattering angles

标准液浊度/NTU	0	100	150	250	500	800
散射角度 $\theta/(^{\circ})$	0	11	25	45	60	75
标准液浊度/NTU	1 000	1 250	1 500	1 800	2 000	
散射角度 $\theta/(^{\circ})$	90	105	120	135	145	

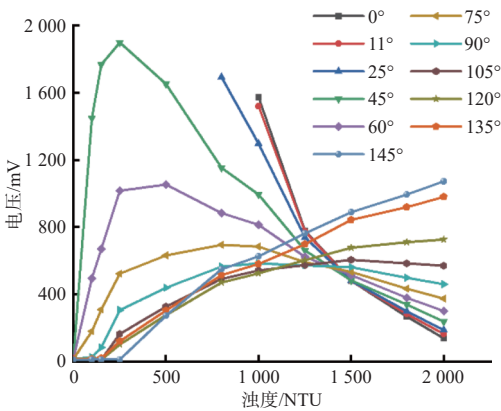


图 5 多角度散射实验结果

Fig. 5 Experimental results of multi-angle scattering

在 100 NTU~2 000 NTU 范围内,对 45°~145° 间 8 条不同散射角度的曲线分别做多项式拟合处理,满足最大拟合误差小于 5% 条件下,得到不同散射角度所需的最小阶数如表 2 所示。拟合所需的最小阶数越小,表示该散射角度越适合作为测量标定曲线。

表 2 拟合误差小于 5% 的最小拟合阶数

Table 2 Minimum fitting order with fitting error less than 5%

散射角度 $\theta/(^{\circ})$	拟合所需最小阶数	最大误差/%
45	6	4.65
60	4	4.97
75	3	4.53
90	2	4.35
105	2	3.35
120	2	3.19
135	1	4.22
145	3	4.33

由表 2 可知,随着散射角度的增加,拟合所需的最小阶数逐渐降低。在 135°时,一阶线性拟合即取得了良好的拟合效果。由于 145°散射信号在低浊度范围内信号微弱,使得其拟合所需的最小阶数大于 135°散射信号。

3 标定

增加 600 NTU、1 350 NTU、1 900 NTU 三组标准浊度液,再次测量 135°散射光信号,实验测量结果和拟合结果如图 6 所示,分段拟合情况如表 3 所示。

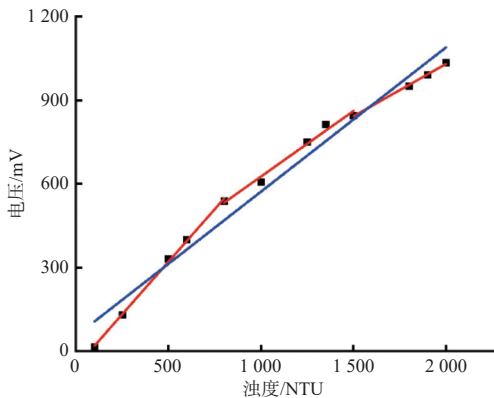


图 6 135°散射曲线分段拟合结果
Fig. 6 Segmentation fitting results of 135° scattering curves

表 3 135°散射光信号分段拟合情况

浊度/NTU	斜率	R^2
100~2 000	0.517 2	0.97
100~800	0.753 2	0.99
800~1 500	0.505 6	0.98
1 500~2 000	0.342 6	0.99

根据测量结果,在 100 NTU~800 NTU 范围内,135°散射光信号的直线拟合同样有不错的灵敏度和精度。在 800 NTU~2 000 NTU 范围内,135°信号仍具备良好的线性。对比 90°散射光,采用 135°散射光作为测量信号虽然减少了 100 NTU~800 NTU 浊度范围内的灵敏度,但是增加了浊度的测量范围。

保持 135°散射角不变,缩小散射光程再次测量,实验测量结果和拟合结果如图 7 所示,分段拟合情况如表 4 所示。实验结果表明,在 100 NTU~2 000 NTU 范围内,135°散射光信号良好的线性拟合特点不受散射光程的影响。综上所述,对比常

用的 90°散射信号,利用 135°散射光信号可以提高浊度仪的测量范围,改善浊度仪在高浊度范围的测量精度。

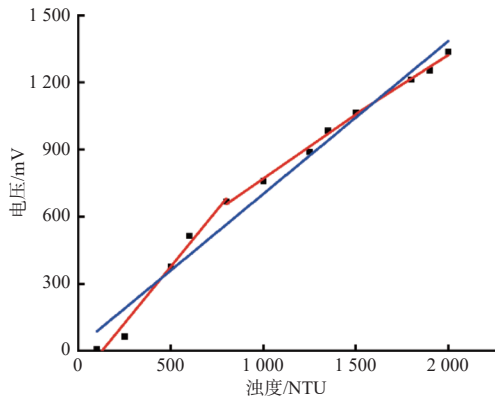


图 7 减小 135°散射光程测量拟合结果
Fig. 7 Measurement fitting results after reducing 135° scattered path

表 4 减小 135°散射光程分段拟合情况

浊度/NTU	斜率	R^2
100~2 000	0.683 5	0.97
100~800	1.013 3	0.98
800~1 500	0.573 2	0.99
1 500~2 000	0.526 4	0.98

4 结论

本文提出了一种新的散射光浊度测量方法,设计实验研究了 11°~145°范围内 10 个散射角的大量程浊度测量适应性。通过多项式拟合阶次分析的方法,发现可以采用 135°散射法代替传统的 90°散射法进行浊度测量。在 100 NTU~2 000 NTU 量程区间内,对比其他散射角度,135°信号仅通过线性拟合即可达到测量误差在 5% 以内的要求。相较于传统的 90°散射信号,其高浊度范围内的线性拟合关系具有明显的优越性,在保证一定测量精度的条件下扩大了测量范围。后续可以增加实验标准液的浊度范围以及数量,进一步研究 135°散射信号在更大浊度范围的测量适应性。

参考文献:

[1] 王志丹,常建华,朱成刚,等.新型宽量程浊度传感器设计[J].传感器与微系统,2016,35(5): 77-79.

- WANG Zhidan, CHANG Jianhua, ZHU Chenggang, et al. Design of new type of wide-range turbidity sensor[J]. *Transducer and Microsystem Technologies*, 2016, 35(5): 77-79.
- [2] 黄萌. 光电浊度检测系统的研究[D]. 北京: 北京化工大学, 2019.
- HUANG Meng. Research on photoelectric turbidity detection system[D]. Beijing: Beijing University of Chemical Technology, 2019.
- [3] 邹钦文, 王英. 大浊度监测超声测量方法及测量系统研究[J]. *机电工程*, 2019, 36(5): 475-479.
- ZOU Qinwen, WANG Ying. Study on ultrasonic measurement method and measurement system for large turbidity monitoring[J]. *Journal of Mechanical & Electrical Engineering*, 2019, 36(5): 475-479.
- [4] WANG Y Z, HU J T, WANG H Q, et al. A transmission turbidity measurement system with wide dynamic range based on single photon detection technology[C]//Sixth Symposium on Novel Optoelectronic Detection Technology and Applications. Beijing: SPIE, 2020: 11455.
- [5] LI W, ZHANG Z Y. Research on turbidity intelligent detection sensor based on adjustable light intensity[J]. *Instrument Technique and Sensor*, 2020(2): 15-19.
- [6] GIMENEZ A J, MEDELLIN-RODRIGUEZ F J, CONTRERAS-MARTINEZ L M, et al. Turbidimetry by image degradation analysis[J]. *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*, 2020, 69(10): 7574-7579.
- [7] 张宜文, 赵旭, 王骏, 等. 基于福尔马胂溶液的 CRP 快速分析仪检测方法[J]. *计量学报*, 2021, 42(6): 828-832.
- ZHANG Yiwen, ZHAO Xu, WANG Jun, et al. Method of CRP rapid analyzer based on formazine polymer[J]. *Acta Metrologica Sinica*, 2021, 42(6): 828-832.
- [8] 徐聪辉, 李彩. 广角水体体散射函数测量技术及其应用研究进展[J]. *遥感学报*, 2019, 23(6): 1078-1090.
- XU Conghui, LI Cai. Progress of measurement technology and application of general-angle volume scattering function of water[J]. *National Remote Sensing Bulletin*, 2019, 23(6): 1078-1090.
- [9] 袁易君, 任德明, 胡孝勇. Mie 理论递推公式计算散射相位函数[J]. *光散射学报*, 2005, 17(4): 366-371.
- YUAN Yijun, REN Deming, HU Xiaoyong. Calculation of scattering phase function by recurrence formula of Mie theory[J]. *The Journal of Light Scattering*, 2005, 17(4): 366-371.
- [10] SÁNCHEZ H R. Seven derivations of the Beer-Lambert law[J]. *Spectroscopy Letters*, 2021, 54(2): 133-139.
- [11] ZANG Z Z, QIU X B, GUAN Y M, et al. A novel low-cost turbidity sensor for *in situ* extraction in TCM using spectral components of transmitted and scattered light[J]. *Measurement*, 2020, 160: 107838.
- [12] 贺文迪, 胡森, 李鹏, 等. 浑浊介质中激光侧向散射实验与仿真研究[J]. *光子学报*, 2021, 50(1): 211-217.
- HE Wendi, HU Miao, LI Peng, et al. Experimental and simulation study of laser side scattering in turbid media[J]. *Acta Photonica Sinica*, 2021, 50(1): 211-217.
- [13] 谭帅帅, 刘伟, 齐甜甜, 等. 基于后向散射的高浓度纳米颗粒粒度分布测量方法研究[J]. *应用光学*, 2021, 42(3): 516-521.
- TAN Shuaishuai, LIU Wei, QI Tiantian, et al. Research on measurement method of size distribution for high-concentration nano-particles based on back scattering[J]. *Journal of Applied Optics*, 2021, 42(3): 516-521.
- [14] MAYESFFER E E P, LARA E R, SANCHEZ W F G, et al. 3D Monte Carlo analysis on photons step through turbid medium by Mie scattering[J]. *Revista Mexicana De Fisica*, 2021, 67(2): 292-298.
- [15] TOMPERI J, ISOKANGAS A, TUUTILA T, et al. Functionality of turbidity measurement under changing water quality and environmental conditions[J]. *Environmental Technology*, 2022, 43(7): 1093-1101.
- [16] SHI M X, MA J B, ZHANG K. The impact of water temperature on in-line turbidity detection[J]. *Water*, 2022, 14(22): 3720.
- [17] 孙森, 黄鹭, 高思田, 等. 多角度动态光散射法的纳米颗粒精确测量[J]. *计量学报*, 2020, 41(5): 529-537.
- SUN Miao, HUANG Lu, GAO Sitian, et al. Accurate measurement of nanoparticles by multi-angle dynamic light scattering method[J]. *Acta Metrologica Sinica*, 2020, 41(5): 529-537.
- [18] LIU F F, YANG Z H, JIAO Y H, et al. Fiber Bragg grating probe system with picometer-level micro-displacement signal processing resolution[J]. *Optics and Precision Engineering*, 2022, 30(7): 755-764.