文章编号:1002-2082(2010)06-0883-05

左手材料平板对傍轴高斯光束聚焦特性分析

易煦农[1]，刘劲松[1]，陈 欢[2]，杜秋姣[1]
(1. 华中科技大学 光电子科学与工程学院 武汉国家光电实验室，湖北 武汉 430074；
2. 孝感学院 物理与电子信息工程学院，湖北 孝感 432000)

摘 要：在傍轴近似下，推导出了左手材料平板聚焦系统的传输矩阵，并利用ABCD定律得到了高斯光束在左手材料中和经过平板透镜聚焦后的传输公式。高斯光束在左手材料内部和像空间的传输公式的研究表明：像高斯光束和物高斯光束束腰大小一致，即左手材料平板透镜实际上对高斯光束没有聚焦作用。研究同时表明左手材料平板对高斯光束的聚焦与几何光学成像规律完全一致，而不存在一般透镜聚焦时的焦移效应。

关键词：左手材料；ABCD定律；高斯光束；焦移
中图分类号：TN204 **文献标志码**：A

Analysis of focusing properties for paraxial Gaussian beam focused by a left-handed material slab

YI Xu-nong[1], LIU Jin-song[1], CHEN Huan[2], DU Qiu-jiao[1]
(1. Wuhan National Laboratory for Optoelectronics, School of Optoelectronic Science and Engineering, Huazhong University of Science and Technology, Wuhan 430074, China; 2. School of Physics and Electronic Information Engineering, Xiaogan University, Xiaogan 432000, China)

Abstract: Under paraxial approximation, the transfer matrix of left-handed slab focusing system is derived. Using ABCD law, the propagation expressions for Gaussian beam focused by a left-handed material slab are obtained. On the basis of propagation formula, the focusing properties of Gaussian beam are analyzed. The beam waist of image Gaussian beam is equal to the beam waist of object Gaussian beam under paraxial approximation, that is to say, the left-handed material slab can not focus Gaussian beam. The focusing for Gaussian beam with a left-handed material coincides with imaging rules of geometrical optics and does not have focal shift.

Key words: left-handed material; ABCD law; Gaussian beam; focal shift

引言

1968年，前苏联物理学家Veselago从理论上证明[1]：当一种材料的介电常数ε和磁导率μ同时为负数时其折射率必须取负值。电磁波在这种材料中传播时，其电场矢量$\boldsymbol{E}$、磁场矢量$\boldsymbol{H}$和波矢$\boldsymbol{k}$遵循左手定则，所以这种材料被称之为“左手材料(left-handed materials，简称LHM)”。这种媒质因具有负折射率而表现出很多奇特的物理光学特性，如反多普勒效应(inverse Doppler effect)、负折射效应和反切伦科夫辐射(reversed Cerenkov radiation)等。但是由于自然界并不存在这种介电常数和磁导率同时为负的材料，所以Veselago的工作在很长一段时间里并没有引起人们的重视。2000年，Smith等人首次用实验证明，在微波波段

收稿日期：2010-04-22； **修回日期**：2010-05-13
基金项目：国家973项目(2007CB310403)；国家自然科学基金(10974063)
作者简介：易煦农(1979－)，男，湖南湘潭人，华中科技大学光电子科学与工程学院博士研究生，主要从事新型人工电磁材料的光传输特性研究。E-mail：yixunong@vip.163.com

二维铜金属线阵列和有缺口的环谐振器阵列组成的复合体系具有左手材料特性[2],从而实验证明了构造负折射率物质是可能的。同年,Pendry 提出利用左手材料板制作完美透镜(perfect lens),从而突破衍射极限实现亚波长聚焦的概念[3]。从此,左手材料由于其巨大潜在应用价值引起了国内外学术界浓厚的研究兴趣[4-8]。2004 年,Brock 等人分析了左手材料内部的聚焦效应[9]。在国内,罗海陆等人运用角谱理论获得了高斯光束在平板左手材料透镜内部和像空间的传输公式[10]。林振等人采用时域有限差分法模拟了电磁波在负折射率媒质中的传播[11]。最近,梁斌明等人则根据基尔霍夫衍射理论,对左手材料平板衍射公式进行数值计算,推导出了左手材料平板折射率偏离−1 时像点附近的光强分布[12]。

本文首先用几何光学的方法得到了平板左手材料的成像公式及传输矩阵,然后利用ABCD 定律得到了傍轴高斯光束通过各向同性平板左手材料的传输公式。这种方法比通过角谱理论求解 Maxwell 方程组更加简便、快捷。最后,本文基于高斯光束的传输公式分析了傍轴近似下平板左手材料对高斯光束的聚焦特性,发现平板左手材料对高斯光束的聚焦与几何光学成像规律完全一致。更加有趣的是物像高斯光束束腰大小一致,即平板左手材料对高斯光束是没有聚焦效应的。同时,左手材料平板聚焦系统对高斯光束的聚焦不存在一般透镜聚焦时的焦移现象[13]。

1　平板左手材料透镜的成像公式与传输矩阵

考虑图 1 所示的光学系统,利用几何光学方法分析傍轴条件下各向同性左手材料平板的成像规律。假定左手材料平板垂直光轴放置,其厚度为d。物点位于光轴,与左手材料平板的距离为u(即物距)。物侧介质折射率为n_{R_1},像侧介质折射率为n_{R_2},左手材料平板折射率为n_L,设像距为v,则根据折射定律有:

$$n_{R_1}\sin\theta_1=n_L\sin\theta_2=n_{R_2}\sin\theta_3 \tag{1}$$

在傍轴近似条件下,假定入射光线与左手材料的交点离轴距离为l,出射光线与左手材料的交点离轴距离为l',则上式可以改写为

$$n_{R_1}\frac{1}{u}=n_L\frac{l'-l}{d}=-n_{R_2}\frac{l'}{v} \tag{2}$$

消去l 和l'得:

$$-n_{R_1}n_{R_2}d=n_L(n_{R_2}u+n_{R_1}v) \tag{3}$$

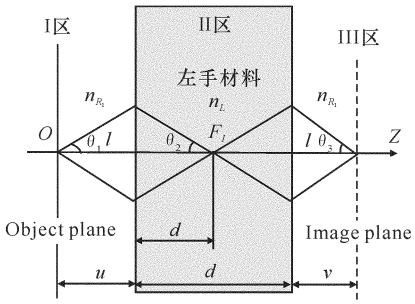

图 1　平板左手材料聚焦光学系统示意图

Fig. 1　The schematic plan of focusing system with a left-handed material

此即为左手材料平板的成像公式。值得注意的是,上述结论是基于左手材料厚度$d\geqslant-\frac{n_L}{n_{R_1}}u$ 这一条件得到的。这一条件是利用左手材料平板实现聚焦的必要条件。此时,平板左手材料成像系统成实像且会有 2 个焦点:一个焦点在左手材料内部,称之为内焦点(internal focus);另一个焦点在左手材料外部的像空间,称之为外焦点(external focus)[8]。经简单分析可以得到内焦点F_I 与左手材料平板前表面的距离为

$$d'=-\frac{n_L}{n_{R_1}}u \tag{4}$$

可见内焦点的位置取决于左手材料折射率与入射端介质折射率的比值以及物距。

利用方程(2),我们可以得到从左手材料板出射傍轴光线坐标(我们用离轴线距离l'和光线与轴线尖角θ_2 表示)与入射到左手材料平板表面光线的初始坐标(l,θ_1)之间的关系为

$$\begin{pmatrix} l' \\ \theta_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & \frac{n_{R_2}}{n_L}d \\ 0 & \frac{n_{R_1}}{n_{R_2}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} l \\ \theta_1 \end{pmatrix} \tag{5}$$

也就是说,左手材料平板透镜对傍轴光线的变换矩阵为$\begin{pmatrix} 1 & \frac{n_{R_2}}{n_L}d \\ 0 & \frac{n_{R_1}}{n_{R_2}} \end{pmatrix}$。

假定左手材料平板两侧介质折射率一样,即:$n_{R_1}=n_{R_2}=n_R$,则(3)式可简化为

$$-n_R d = n_L(u+v) \tag{6}$$

而左手材料平板透镜的传输矩阵简化为 $\begin{pmatrix} 1 & \frac{n_R}{n_L}L \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$。为了数学上的方便且不失一般性,下面我们就讨论这种情况下高斯光束聚焦特性问题。

2　高斯光束通过左手材料平板的聚焦特性

应用ABCD定律讨论左手材料平板对傍轴高斯光束的聚焦特性。使用ABCD定律的最大好处在于通过简单的数学运算就可以获得高斯在左手材料内部及其像空间的光场传输表达式,而避免了角谱方法所带来的繁琐的积分运算。我们相信这样的方法也适用于其他光束通过左手材料的变换问题。仍然考虑如图1所示的光学系统,假定高斯光束沿 z 轴传输,束腰位于 $z=0$ 平面,束腰与平板左手材料距离为 u,出射高斯光束束腰与平板左手材料距离为 v。$z=0$ 平面高斯光束的场分布可以表示为

$$E(x,y,0)=\mathrm{e}^{-\frac{x^2+y^2}{w_0^2}} \tag{7}$$

式中 w_0 为高斯光束腰斑半径。将上式改写为 q 参数形式:

$$E(x,y,0)=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi(x^2+y^2)}{\lambda q_0}} \tag{8}$$

式中:λ 为Ⅰ区介质中的光波波长;$q_0=\mathrm{i}f=-\mathrm{i}\cdot\frac{\pi w_0^2}{\lambda}$ 为 $z=0$ 处 q 参数,f 为高斯光束的共焦参数。该光束在通过变换矩阵为 $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ 的光学系统后,可以由ABCD定律方便地得到出射面的场分布。

在Ⅰ区中,光束通过一段折射率为正的媒质,其传输矩阵为 $\begin{pmatrix} 1 & z \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$。利用ABCD定律可以求得Ⅰ区中相应 q 参数为 $q_1=q_0+z$,所以,在Ⅰ区中高斯光束的传播规律可以由下式描述:

$$E_1(x,y,z)=\frac{q_0}{q_0+z}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi(x^2+y^2)}{\lambda(q_0+z)}} \tag{9}$$

同理,利用ABCD定律可以得到Ⅱ区中任一点高斯光束的 q 参数为 $q_2=\frac{n_L}{n_R}q_0+(\frac{n_L}{n_R}-1)u+z$。其光场分布为

$$E_2(x,y,z)=\frac{q_0}{q_0+z-(1-n_R/n_L)u}\cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi(x^2+y^2)}{\lambda\left[\frac{n_L}{n_R}q_0+(\frac{n_L}{n_R}-1)u+z\right]}} \tag{10}$$

进一步分析上式可以发现由于左手材料折射率为负,高斯光束具有反转Gouy相移和负的Rayleigh距离[9]。

根据 $\frac{1}{w_2^2(z)}=-\frac{\pi}{\lambda}\mathrm{Im}\left\{\frac{1}{q_2}\right\}$,可以求得左手材料中高斯光束束宽的演化公式为

$$w_2(z)=\sqrt{\frac{\lambda\{(n_L f/n_R)^2+[(n_L/n_R-1)u+z]^2\}}{\pi f n_L/n_R}} \tag{11}$$

平板左手材料中光束束腰位置由 $\frac{\partial w_2(z)}{\partial z}=0$ 求出:

$$z_{w_{0i}}=\left(1-\frac{n_L}{n_R}\right)u \tag{12}$$

我们注意到左手材料中束腰的位置与前面几何光学方法得到的内焦点是一致的,这意味着高斯光束在左手材料内部的聚焦是没有焦移的。

将(12)式代入(11)式得左手材料高斯光束腰斑半径大小为

$$w_{0t}=w_0 \tag{13}$$

因此,左手材料板中高斯光束束腰的大小与入射物高斯光束的束腰大小相等,也就是说傍轴高斯光束中左手材料板内部实际上是没有聚焦效应的。

重复上面的过程,我们可以获得在Ⅲ区中高斯光束的 q 参数为 $q_3=q_0+(n_R/n_L-1)d+z$。因而Ⅲ区中的光场可以表示为

$$E_3(x,y)=\frac{q_0}{q_0+(n_R/n_L-1)d+z}\cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi(x^2+y^2)}{\lambda[q_0+(n_R/n_L-1)d+z]}} \tag{14}$$

其束宽为

$$w_2(z)=\sqrt{\frac{\lambda\{f^2+[(n_R/n_L-1)d+z]^2\}}{\pi f}} \tag{15}$$

光束束腰位置为

$$z_{w_{0e}}=(1-n_R/n_L)d \tag{16}$$

我们发现像方高斯光束束腰所在位置也正是均匀左手材料平板几何光学成像公式(6)所描述的成像位置。这说明左手材料平板透镜聚焦系统在像空间的聚焦同样存在没有焦移这一有趣现象。

图2根据方程(15)给出了不同厚度平板透镜随传输距离的变化规律,图中传输距离 z 和束宽 $w(z)$ 已分别用瑞利距离 z_R 和束腰半径 w_0 作了归一化处理。由图2我们可以直观地看到像方高斯光

束束腰位置与平板透镜厚度的关系。

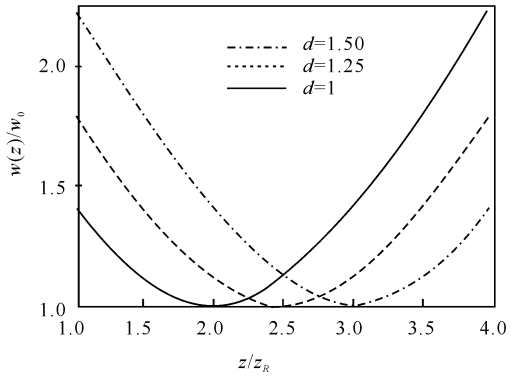

图 2　不同厚度平板左手材料透镜像方高斯光束束宽随传输距离的演化曲线($n_L/n_R=-1$)

Fig. 2　Plot of the beam widths in image space with different *d*

实际工作当中,最关心的是光学系统对束腰的变换。所以,同样通过对(15)式的微分运算,我们获得像方高斯光束腰斑半径为$w_{0e}=w_0$。

而从图 2 也可以看到由不同厚度平板透镜聚焦后高斯光束的归一化束腰半径都为1。可见,在傍轴近似下,经左手材料平板聚焦后的高斯光束束腰与入射光束束腰完全相等。

我们通过对左手材料及像方高斯光束的讨论发现无论是在平板透镜内部还是在像空间,傍轴高斯光束实际上都是没有被聚焦的,这是因为我们在讨论过程中引入了傍轴近似的缘故。在非傍轴条件下,平板左手材料对光束应该是具有聚焦作用的。用无限大的负折射率介质板制成的完美透镜可将光束的各个角谱成份完美地聚焦于一点,聚焦光斑的精度可以达到小于波长的尺度,这就是所谓的"完美透镜"[3]。

3　结论

利用折射定律,我们获得了傍轴近似条件下平板左手材料透镜的成像公式和 ABCD 矩阵。根据 ABCD 定律,我们推导出了高斯光束在左手材料板和像空间的传输公式。通过对高斯光束传输公式的分析,我们发现无论是左手材料的内焦点还是在像空间的外焦点,高斯光束的束腰半径都和物空间的束腰半径大小一致,也就是说傍轴条件下的左手材料板对高斯光束是没有聚焦效应的。同时,我们还发现像方高斯光束束腰的位置和几何光学预言的成像位置是完全一致的,即平板左手材料透镜没有一般透镜聚焦的焦移现象。

参考文献:

[1] VESELAGO V G. The electrodynamics of substances with simultaneously negative values of ε and μ [J]. Sov. Phys. Usp., 1968, 10(4): 509-514.

[2] SMITH D R, PADILLA W J, VIER D C, et al. A composite medium with simultaneously negative permeability and permittivity[J]. Phys. Rev. Lett., 2000, 84(18): 4184-4187.

[3] PENDRY J B. Negative refraction makes a perfect lens [J]. Phys. Rev. Lett., 2000, 85 (18): 3966-3969.

[4] SHELBY R A, SMITH D R, SCHULTZ S. Experimental verification of a negative index of refraction[J]. Science, 2001, 292(6): 77-79.

[5] PARAZZOLI C G, GREEGOR R B, LI K, et al. Experimental verification and simulation of negative index of refraction using Snell's law[J]. Phys. Rev. Lett., 2003, 90(10): 1074011-1074014.

[6] SMITH D R, PENDRY J B, WILTSHIRE M C K. Metamaterials and negative refractive index [J]. Science, 2004, 305(5685): 788-792.

[7] SHADRIVOV I V, SUKHORUKOV A A, KIVSHAR Y S. Guided modes in negative index waveguides[J]. Phys. Rev. E, 2003, 67(5): 057602.

[8] SHADRIVOV I V, SUKHORUKOV A A, KIVSHAR Y S, et al. Nonlinear surface waves in left-handed materials [J]. Phys. Rev. E, 2004, 69 (1): 016617.

[9] BROCK J B, HOUCK A A, CHUANG I L. Focusing inside negative index materials[J]. Appl Phys Lett, 2004, 85(13): 2472-2474.

[10] LUO H L, HU W, REN Z Z, et al. Focusing and phase compensation of paraxial beams by a left-handed material slab [J]. Opt. Commun., 2006, 266: 327-331.

[11] 林振,梁昌洪. 负媒质模型的时域有限差分法分析[J]. 强激光与粒子束, 2006, 18(4): 615-617.
LIN Zhen, LIANG Chang-hong. Time domain analysis of negative refractive index materials by FDTD method[J]. High Power Laser and Particle Beams, 2006, 18(4): 615-617. (in Chinese with an English abstract)

[12] 梁斌明,姚翠雅,李卓,等. 折射率偏离－1 时的平板

成像特性及改善[J].应用光学,2010,31(1):19-23.
LIANG Bin-ming, YAO Cui-ya, LI Zhuo, et al. Slab imaging performance from-1 and its improvement[J]. Journal of Applied Optics, 2010,31(1): 19-23. (in Chinese with an English abstract)

[13] CATER W H. Focal shift and concept of effective Fresnel number for a Gaussian laser beam[J]. Appl. Opt. ,1982,21(11):1989-1994.