文章编号:1002-2082(2010)04-0544-05

不同Zernike多项式求取环孔径波面像差的研究

邵 晶[1,2]，马冬梅[1]，聂真威[1,2]
(1. 中国科学院 长春光学精密机械与物理研究所，
吉林 长春 130033；2. 中国科学院 研究生院，北京 100039)

摘 要：由于Zernike环多项式各项在环域上正交，以此为基准可以得到Zernike圆多项式拟合环孔径波面求解Seidel像差系数的误差。为了对Zernike圆多项式与环多项式求解的Seidel系数进行准确的比较，根据波像差理论推导并建立对比实验模型，进行量化比较。比较对于具有较大遮拦比的环孔径波面采用Zernike环多项式拟合与采用Zernike圆多项式拟合求取Seidel系数的差别。实验结果表明，采用Zernike圆多项式进行拟合求取Seidel系数时，主要的相对误差存在于离焦、球差和彗差。9项Zernike圆多项式拟合求取的Seidel系数比36项Zernike圆多项式更接近Zernike环多项式求取的系数。同时，如果参与拟合的项数继续减少，求取的Seidel误差反而增大。

关键词：Zernike多项式；Seidel系数；最小二乘法；中心遮拦
中图分类号：O439；TH701 **文献标志码**：A

Aberration analysis for annular pupils by different Zernike polynomials

SHAO Jing[1,2], MA Dong-mei[1], NIE Zhen-wei[1,2]
(1. Changchun Institute of Optics, Fine Mechanics and Physics, Chinese Academy of Sciences, Changchun 130033, China; 2. Graduate School of Chinese Academy of Sciences, Beijing 100039, China)

Abstract: Due to the orthogonality of every Zernike annular polynomial in the annular field, the error in Seidel coefficients solved by wave front fitting with circular polynomial for annular pupils could be obtained. To accurately compare Seidel coefficients solved by circular polynomial with Zernike annular polynomial, an experiment model was built according to the theory of wave front aberration. The Seidel coefficients solved by wave front fitting for large obscuration pupils with Zernike annular polynomial and Zernike circular polynomial were compared. The result showed that the main relative errors remained in defocus, sphere and coma aberrations, when the Seidel coefficients were solved by Zernike circular polynomials. The Seidel coefficients solved by the 9 circular polynomial terms are more close to the results solved by the annular polynomial rather than the 36 circular polynomial terms. However, when the number of circular polynomial terms decreases to fewer than 9, the error in Seidel coefficients obtained by circular polynomial will increase.

Key words: Zernike polynomials; Seidel coefficient; least square method; central obscuration

收稿日期:2009-12-25； **修回日期**:2010-01-13
作者简介:邵晶(1984—),男,山东烟台人,硕士,主要研究方向:大口径光学系统检测。E-mail:qunying12@163.com

引言

在光学检测中,通常需要把由干涉仪得到的包含着被测光学波面信息的波面离散点拟合成一个与实际波面尽可能一致的波面函数。Zernike圆多项式在单位圆内具有正交性。因此,它常被用作波面拟合的基底函数。根据Zernike多项式的拟合系数,就可以获得传统的像差系数。但对于环孔径波面,Zernike圆多项式失去了正交性[1],Zernike圆多项式各项在环域上的耦合,导致求取的Seidel系数不准确。Tatian,Mahajan[2-3]引入新的参量——中心遮拦比ep,并运用正交化法对Zernike圆多项式进行修正,推导出了Zernike环多项式来弥补这个缺陷[4-5]。Zernike环多项式在环域上正交,能够正确地求解Seidel系数。它的结果可以被用来评估Zernike圆多项式求解Seidel的误差。但是,采用这两种不同的基底函数对环孔径波面进行拟合,结果是不一样的[6-7]。由于Zernike圆多项式和环多项式表达式有所不同,因此需要建立正确的实验模型,这样才能通过具体的实验来讨论采用Zernike圆多项式做基底函数与采用环多项式做基底函数在环孔径波面拟合求取Seidel系数之间的差异。目前大多数干涉仪软件是采用Zernike圆多项式拟合并求取Seidel系数。因此,通过比较与Zernike环多项式的求解结果为正确获得环孔径波面的Seidel系数,这在工程应用中具有意义。同时,本文也将探讨如何利用Zernike圆多项式拟合尽可能地接近环多项式求取的Seidel。

1 建立实验模型

由于Zernike圆多项式和Zernike环多项式表达式有所不同,比较拟合系数并不能准确地判断出对像差求解的影响。可以利用Seidel的推导公式,对求出的像差直接进行对比则更为直观。

根据文献[8-10]可以利用前9项Zernike多项式的线性组合近似地表示Seidel像差,将表达式合并同类项,得到如下公式

$$\begin{aligned}W(\rho,\theta')=&a_1-a_4+a_9+\sqrt{(a_2-2a_7)^2+(a_3-2a_8)^2}\rho\cos\left[\theta'-\tan^{-1}\left(\frac{a_3-2a_8}{a_2-2a_7}\right)\right]+\\&(2a_4-6a_9-\sqrt{a_5^2+a_6^2})\rho^2+2\sqrt{a_5^2+a_6^2}\rho^2\cos^2\left[\theta'-\frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{a_6}{a_5}\right)\right]+\\&3\sqrt{a_7^2+a_8^2}\rho^3\cos\left[\theta'-\tan^{-1}\left(\frac{a_8}{a_7}\right)\right]+6a_9\rho^4\end{aligned}\tag{1}$$

式中:a_i是第i项Zernike圆多项式的系数。

这样可以得到用Zernike圆多项式系数表示的Seidel像差。但是,Zernike圆多项式在拟合环孔径波面时失去了正交性,使得各项系数之间存在耦合现象,求取的Seidel系数存在误差。文献[7]中分别采用前9,16,25,36项Zernike圆多项式和环多项式对带有分割遮拦的环形干涉图进行拟合实验。证实了对于这种波面采用Zernike圆多项式拟合存在交叉耦合现象,而Zernike环多项式的拟合结果能够更准确地反映像差。

利用文献[2]和[9]中各项Zernike环多项式的物理意义,对于具有中心遮拦的环孔径波面,将前9项Zernike环多项式的线性组合近似地表示Seidel波像差,合并同类项

$$\begin{aligned}W(\rho,\theta',\varepsilon)=&b_1-b_4\frac{1+\varepsilon^2}{1-\varepsilon^2}+b_9\frac{1+4\varepsilon^2+\varepsilon^4}{(1-\varepsilon^2)^2}+\left(b_2\frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon^2}}-2b_7\frac{1+\varepsilon^2+\varepsilon^4}{(1-\varepsilon^4)\sqrt{(1+\varepsilon^2)(1+4\varepsilon^2+\varepsilon^4)}}\right)\rho\cos\theta'+\\&\left(b_3\frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon^2}}-2b_8\frac{1+\varepsilon^2+\varepsilon^4}{(1-\varepsilon^2)\sqrt{(1+\varepsilon^2)(1+4\varepsilon^2+\varepsilon^4)}}\right)\rho\sin\theta'+\left(2b_4\frac{1+\varepsilon^2}{1-\varepsilon^2}-6b_9\frac{1+\varepsilon^2}{(1-\varepsilon^2)^2}+\right.\\&b_5\frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon^2+\varepsilon^4}}\cos2\theta'+b_6\frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon^2+\varepsilon^4}}\sin2\theta')\rho^2+3\left(b_7\frac{1+\varepsilon^2}{(1-\varepsilon^2)\sqrt{(1+\varepsilon^2)(1+4\varepsilon^2+\varepsilon^4)}}\right.\\&\left.\cos\theta'+b_8\frac{1+\varepsilon^2}{(1-\varepsilon^2)\sqrt{(1+\varepsilon^2)(1+4\varepsilon^2+\varepsilon^4)}}\sin\theta'\right)\rho^3+6b_9\frac{1}{(1-\varepsilon^2)^2}\rho^4\end{aligned}\tag{2}$$

式中:b_i是第i项Zernike环多项式的系数。

利用公式(2)就可以得到由Zernike环多项式系数表示的Seidel像差。

在实际工程中更关心倾斜、离焦、像散、彗差、

球差,对(1)式进行如下变化:令 $T_1=a_2-2a_7$, $T_2=a_3-2a_8$, $T_3=2a_4-6a_9$, $T_4=6a_9$, $T_5=a_5$, $T_6=a_6$, $T_7=3a_7$, $T_8=3a_8$,得

$$W(\rho,\theta')=a_1-a_4+a_9+\sqrt{(T_1)^2+(T_2)^2}\rho\cos\left[\theta'-\tan^{-1}\left(\frac{T_2}{T_1}\right)\right]+(T_3-\sqrt{T_5^2+T_6^2})\rho^2+2\sqrt{T_5^2+T_6^2}\rho^2\cos\left[\theta'-\frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{T_6}{T_5}\right)\right]+\sqrt{T_7^2+T_8^2}\rho^3\cos\left[\theta'-\tan^{-1}\left(\frac{T_8}{T_7}\right)\right]+T_4\rho^4 \tag{3}$$

式中:T_1 和 T_2 是 xy 方向的倾斜分量;T_3 是离焦分量;T_4 是球差;T_5 和 T_6 是 xy 方向的像散分量;T_7 和 T_8 是 xy 方向的彗差分量。

同时,对(2)式进行类似变化

令 $T_1'=b_2\dfrac{1}{\sqrt{1+\varepsilon^2}}-2b_7\dfrac{1+\varepsilon^2+\varepsilon^4}{(1-\varepsilon^2)\sqrt{(1+\varepsilon^2)(1+4\varepsilon^2+\varepsilon^4)}}$;

$T_2'=b_3\dfrac{1}{\sqrt{1+\varepsilon^2}}-2b_8\dfrac{1+\varepsilon^2+\varepsilon^4}{(1-\varepsilon^2)\sqrt{(1+\varepsilon^2)(1+4\varepsilon^2+\varepsilon^4)}}$;

$T_3'=2b_4\dfrac{1}{1-\varepsilon^2}-6b_9\dfrac{1+\varepsilon^2}{(1-\varepsilon^2)^2}$;

$T_4'=6b_9\dfrac{1}{(1-\varepsilon^2)^2}$;

$T_5'=b_5\dfrac{1}{\sqrt{1+\varepsilon^2+\varepsilon^4}}$;

$T_6'=b_6\dfrac{1}{\sqrt{1+\varepsilon^2+\varepsilon^4}}$;

$T_7'=3b_7\dfrac{1+\varepsilon^2}{(1-\varepsilon^2)\sqrt{(1+\varepsilon^2)(1+4\varepsilon^2+\varepsilon^4)}}$;

$T_8'=3b_8\dfrac{1+\varepsilon^2}{(1-\varepsilon^2)\sqrt{(1+\varepsilon^2)(1+4\varepsilon^2+\varepsilon^4)}}$

式中:T_1' 和 T_2' 是 xy 方向的倾斜分量;T_3' 是离焦分量;T_4' 是球差;T_5' 和 T_6' 是 xy 方向的像散分量;T_7' 和 T_8' 是 xy 方向的彗差分量。

可见,比较 T_i 与 T_i' 并不是Seidel系数的直接比较,而是Seidel分量之间的比较。同时,定义 T_i 的相对误差

$$\Delta_i=\frac{T_i-T_i'}{T_i'}\times 100\% \tag{4}$$

式中:T_i 是Zernike圆多项式求得的 T_i 项;T_i' 是Zernike环多项式求得的项。

2　比较两种Zernike多项式拟合求取的Seidel系数

对一个RC光学系统波前进行了检测,实验装置和由干涉仪得到的环孔径波面如图1所示。对此中心遮拦比为0.45的波面分别采用9项Zernike圆多项式、36项Zernike圆多项式和36项Zernike环多项式拟合,对它们求取的数据进行比较。根据上面建立的比较模型,进行相关的实验,得到结果如表1所示(工作波长 $\lambda=632.8$ nm)。

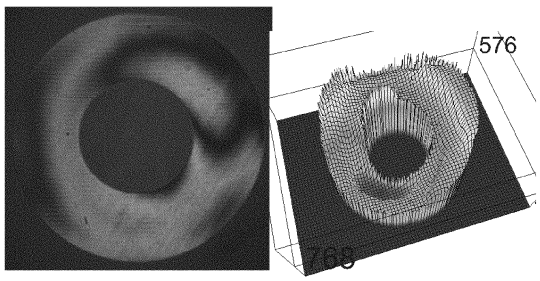

图1　光学系统波面检测

Fig. 1　Wavefront testing for optical system

表1　不同基底函数得到的 T_i 和 T_i' 项

Table 1　T_i and T_i' with different base functions

	9项Zernike圆多项式求取的 T_i/λ	36项Zernike圆多项式求取的 T_i/λ	36项Zernike环多项式求取的 T_i'/λ	9项Zernike圆多项式求取 $\Delta_i/\%$	36项Zernike圆多项式求取 $\Delta_i/\%$
1	−0.183 1	−0.100 0	−0.196 9	−7.01	−49.20
2	−0.519 5	−0.598 6	−0.505 3	2.81	18.50
3	0.071 5	−1.296 8	0.173 7	−58.80	−846.60
4	0.177 3	1.243 3	0.097 7	81.50	1 172.60
5	0.079 3	0.079 4	0.079 3	0.00	0.13
6	−0.140 0	−0.142 3	−0.138 2	1.30	2.97
7	−0.001 3	−0.108 1	0.018 0	−107.20	−700.60
8	0.432 9	0.534 4	0.413 1	4.79	29.40

从上面的实验结果可以看到,对于具有较大中心遮拦的环孔径波面使用Zernike圆多项式求得的Seidel系数与Zernike环多项式的拟合结果有较大差异。采用9项和36项Zernike圆多项式求得的 T_i 相对于 T_i' 的较大差异存在于第3,4,7项,而5,6项差异很小,这说明采用这两种多项式进行拟合求得的Seidel系数差异主要存在于离焦、球差、彗差。其中采用9项Zernike圆多项式拟合求得的第3,4,7项 T_i 的相对误差分别为−58.8%,81.5%,−107.2%,而36项Zernike圆多项式拟合求得的第3,4,7项 T_i 的相对

误差分别为-846.6%,1172.6%,-700.6%。这主要是因为拟合项数的减少,降低了Zernike圆多项式在环域上的耦合程度。因此,可以认为对于环孔径波面的Seidel系数的求取,9项Zernike圆多项式比36项Zernike圆多项式更能得到相对准确的结果。

既然拟合项数的减少能够降低耦合的影响,根据前9项Zernike圆多项式的相关性,将相互影响的耦合的项分开进行拟合是否能将拟合的Seidel精度进一步提高呢?对此,进行了如下实验,我们分别采用1,3,4,6,8,9项多项式进行拟合得到的实验数据如表2所示。

表2 不同项数多项式拟合得到的系数

Table 2 Fitting coefficients with different number of terms

term	$1^{\#}/\lambda$	$3^{\#}/\lambda$	$4^{\#}/\lambda$	$6^{\#}/\lambda$	$8^{\#}/\lambda$	$9^{\#}/\lambda$
1	0.090 1	0.09	0.062 6	0.062 6	0.061 7	0.068 8
2	-	-0.183 4	-0.182 8	-0.183 4	-0.183 7	-0.184 0
3	-	-0.222 1	-0.222 8	-0.222 6	-0.231 1	-0.230 9
4	-	-	0.139 0	0.139 5	0.141 9	0.124 4
5	-	-	-	0.079 2	0.079 4	0.079 3
6	-	-	-	-0.139 9	-0.139 8	-0.140 0
7	-	-	-	-	-0.000 9	-0.000 4
8	-	-	-	-	0.144 8	0.144 3
9	-	-	-	-	-	0.029 5

从表2的结果中可以看到,$1^{\#}$和$3^{\#}$的第1项差别不大;$4^{\#}$和$6^{\#}$的第4项差别不大;$6^{\#}$和$8^{\#}$的第5,6项差别不大。因此,我们采用$3^{\#}$的第1,2,3项,$6^{\#}$的第4,5,6项,$9^{\#}$的第7,8,9项。如此,可以得到前9项的数据依次为:$a_1=0.09$; $a_2=-0.183\ 4$; $a_3=-0.222\ 1$; $a_4=0.139\ 5$; $a_5=0.079\ 2$; $a_6=-0.139\ 9$; $a_7=-0.000\ 4$; $a_8=0.144\ 3$; $a_9=0.029\ 5$。利用上述对(1)式的处理方式。得到的数据如表3所示。

表3 重新得到T_i和Δ_i

Table 3 New T_i and Δ_i

	T_i/λ	T_i'/λ	$\Delta_i/\%$
1	-0.182 6	-0.196 9	-7.26
2	-0.510 7	-0.505 3	1.07
3	0.102 0	0.173 7	-41.30
4	0.177 0	0.097 7	81.20
5	0.079 2	0.079 3	-0.13
6	-0.139 9	-0.138 2	1.23
7	-0.001 2	0.018 0	-106.70
8	0.432 9	0.413 1	4.79

与表1的第2,5列的数据相比,可以看到这种假想在中心遮拦比0.45的环孔径波面的seidel的求取过程中的确发挥了作用,T_i的第2,3,6,7项略有减少。但是T_i的第1,5项却有增加。分析主要原因是实验数据是由不同拟合过程拼组得到的,加之Zernike圆多项式在环域非正交,使得最小二乘法的拟合公式$AX=W$公式严重不成立。为此,进行下面的实验进行验证:将前9项中的每一项单独拟合波面即X只有一项。得到$a_1=0.090\ 1$; $a_2=-0.183\ 1$; $a_3=-0.223\ 7$; $a_4=0.188\ 2$; $a_5=0.079\ 4$; $a_6=-0.137\ 9$; $a_7=-0.027$; $a_8=0.108\ 3$; $a_9=0.051\ 5$。

表4 重新得到的T_i和Δ_i

Table 4 New T_i and Δ_i

	T_i/λ	T_i'/λ	$\Delta_i/\%$
1	-0.129 1	-0.196 9	-34.40
2	-0.440 3	-0.505 3	-12.90
3	0.067 4	0.173 7	-61.20
4	0.309 0	0.097 7	216.30
5	0.079 4	0.079 3	0.13
6	-0.137 9	-0.138 2	-0.22
7	-0.081 0	0.018 0	-550.00
8	0.324 9	0.413 1	-21.40

对上面的数据进行同样的处理,得到的结果见表4。可见拟合项数的减少也会引起求解错误。对比表3和表1的数据,发现假想的方案与表1的前9项拟合差异不大,采用9项Zernike圆多项式拟合求解的Seidel已经能够尽可能接近环多项式求解的结果。

3 结论

本文从波像差理论和Zernike多项式的展开式入手,推导并建立了环孔径波面下Zernike环多项式与Zernike圆多项式求取Seidel系数的比较模型。通过采用不同项数的Zernike多项式进行波面拟合的对比试验,验证了对于具有中心遮拦的环孔径波面,使用Zernike圆多项式并不能准确地求取Seidel像差。实验结果表明,对同一波面采用不同项数的Zernike圆多项式进行拟合求取Seidel系数,采用较少项数的Zernike圆多项式拟合求取的Seidel系数更接近Zernike环多项式求取的结果。但是利用不同拟合过程拼组得到实验数据时,误差会增大。因此采用9项Zernike圆多项式拟合求取的Seidel可以满足接近环多项式求取结果的要求。

研究结果可以为正确获得环孔径波面的Seidel系统提供参考。

参考文献:

[1] 侯溪,伍凡,杨力,等.中心遮拦干涉图的圆泽尼克拟合对计算赛德尔像差的影响分析[J].光学学报,2006,26(1):54-60.
HOU Xi, WU Fan, YANG Li, et al. Effect of central obscurat ion interferograms fitted with Zernike circle polynomials on calculating Seidel aberrations[J]. Acta Optica Sinica, 2006,26(1):54-60. (in Chinese with an English abstract)

[2] VIRENDRA N, MAHAJAN. Zernike annular polynomials for imaging systems with annular pupils[J]. J. Opt. Soc. Am. ,1981,71(1):75-85.

[3] TATIAN B. Aberration balancing in rotationally symmetric lenses[J]. Opt. Soc. Am. ,1974,64(8):1083-1091.

[4] VIRENDRA N, MAHAJAN. Zernike annular polynomials and optical aberrations of systems with annular pupils [J]. Supplement to Optics & Photonics News, 1994,5(11):8125-8132.

[5] GUANG Ming-dai, VIRENDRA N. Mahajan. Zernike annular polynomials and atmospheric turbulence[J]. J. Opt. Soc. Am. A, 2007,24(1):139-155.

[6] 亓波,陈洪斌,刘顺发.Zernike多项式波面拟合的回归分析方法[J].光学精密工程,2007,15(3):396-400.
QI Bo, CHEN Hong-bin, LIU Shun-fa. Regression analysis of wavefront fitting using Zernike polynomial[J]. Optics and Precision Engineering, 2007,15(3):396-400. (in Chinese with an English abstract)

[7] 刘克,李艳秋,刘景峰.带有分割遮拦环形干涉图的波面拟合[J].红外与激光工程,2008,37(增刊):778-784.
LIU Ke, LI Yan-qiu, LIU Jing-feng. Wavefront fitting method for annular interferogram with obscurations [J]. Infrared and Laser Engineering, 2008,37(Sup):778-784. (in Chinese with an English abstract)

[8] 刘志祥.大口径光学系统波前分析技术研究[D].北京:中国科学院研究生院,2008.
LIU Zhi-xiang. Study on the wavefront analysis of large aperture optical system [D]. Beijing: The Graduate School of Chinese Academy of Sciences, 2008.

[9] DANIEL M. Optical shop testing[M]. 3rd ed. New Jersey:John Wiley & Sons, Inc. , 2007:525-539.

[10] JAMES C. WYANT, KATHERINE C. Basic wavefront aberration theory for optical metrology, applied optics and optical engineering: XI [M]. USA: Academic Press, Inc. ,1992.